

PAR. 6.7 POSITRONI E ANNICHILAZIONE

Un positrone differisce da un elettrone solamente per la sua carica elettrica. Questa differenza può essere evidenziata attraverso l'esame della sua struttura. Con riferimento al Cap. 2 ed in particolare alla 12.2.3 che richiamo:

$$1.6.7) \frac{-\hbar R_{i\alpha} \cdot c}{2} \cdot \frac{d^2 \varphi_i(r)}{dr^2} + \left[\frac{\hbar R_{i\alpha} \cdot c}{r^2} - \frac{q_j^2}{2\pi\epsilon_0 r} \right] \varphi_i(r) = E_i \varphi_i(r)$$

Riscrivo la 1.6.7 in funzione delle lunghezze d'onda per la zona cariche e per la zona masse, nel caso dell'elettrone e nel caso del positrone:

A) caso dell'elettrone, zona cariche, ($E > \hbar c^3$), la 1.6.7 diviene:

$$2.6.7) \frac{-\hbar R_{q_i} \cdot c}{2} \cdot \frac{d^2 \varphi_i(r)}{dr^2} + \left[\frac{\hbar R_{q_i} \cdot c}{r^2} - \frac{q_j^2}{2\pi\epsilon_0 r} \right] \varphi_i(r) = E_i \varphi_i(r)$$

Considerando che: $R_{q_i} = \lambda_{q_i} / d$ e: $q_j = \frac{\hbar}{c \lambda_{q_j}}$, ponendo: $i = j$ la 2.6.7 si trasforma nella:

$$3.6.7) \frac{-\hbar \lambda_{q_i} \cdot c}{2} \cdot \frac{d^2 \varphi_i(r)}{dr^2} + \left[\frac{\hbar \lambda_{q_i} \cdot c}{r^2} - \frac{\hbar^2}{2\pi\epsilon_0 c^2 \lambda_{q_i} \cdot r} \right] \varphi_i(r) = E_i \varphi_i(r)$$

B) caso dell'elettrone, zona masse ($E < \hbar c^3$), la 1.6.7 diviene:

$$4.6.7) \frac{-\hbar R_{m_i} \cdot d \cdot c}{2} \cdot \frac{d^2 \varphi_i(r)}{dr^2} + \left[\frac{\hbar R_{m_i} \cdot d \cdot c}{r^2} - \frac{q_j^2}{2\pi\epsilon_0 r} \right] \varphi_i(r) = E_i \varphi_i(r)$$

Considerando che: $R_{m_i} \cdot d = \lambda_{m_i} \cdot d^2$ e che: $q_j \approx e$ la 4.6.7 si trasforma nella:

$$5.6.7) \frac{-\hbar \cdot \lambda_{m_i} \cdot d^2 \cdot e}{2} \cdot \frac{d^2 \phi_i(r)}{dr^2} + \left[\frac{\hbar \lambda_{m_i} \cdot d^2 \cdot e}{r^2} - \frac{e^2}{2\pi \epsilon_0 r} \right] \cdot \phi_i(r) = E_i \cdot \phi_i(r)$$

C) caso del positrone, zona cariche ($E > \hbar c^3$):

Con riferimento all' Appendice 2.C, pongo: $\lambda_{p_i} = -\lambda_{q_i}$ (lunghezza d' onda generica relativa alla carica del positrone) ed inoltre: $\lambda_{m_{p_i}} = \lambda_{m_i}$ (lunghezza d' onda generica relativa alla massa del positrone). La 3.6.7 si trasforma in:

$$6.6.7) \frac{\hbar \lambda_{q_i} e}{2} \cdot \frac{d^2 \phi_i(r)}{dr^2} + \left[\frac{-\hbar \lambda_{q_i} e}{r^2} - \frac{\hbar^2}{2\pi \epsilon_0 c^2 \lambda_{q_i}^2 \cdot r} \right] \cdot \phi_i(r) = E_i \phi_i(r)$$

D) caso del positrone, zona masse ($E < \hbar c^3$):

La 5.6.7 rimane valida anche nel caso del positrone.

Esprimo la coordinata "r", in funzione del raggio della lunghezza d' onda del livello iesimo, attraverso un parametro variabile "ρ":

$$7.6.7) r = \rho \cdot \lambda_{q_i} / \alpha \quad \text{questa espressione è utile solo nella zona cariche e per il potenziale efficace.}$$

Riscrivo la 3.6.7 considerando la 7.6.7 (elettrone, zona cariche):

$$8.6.7) \frac{-\hbar \lambda_{q_i} \cdot e}{2} \cdot \frac{d^2 \phi_i(r)}{dr^2} + \left[\frac{\hbar e d^2}{\rho^2 \lambda_{q_i}} - \frac{\hbar^2 \cdot d}{2\pi \epsilon_0 c^2 \lambda_{q_i}^3 \cdot \rho} \right] \cdot \phi_i(r) = E_i \phi_i(r)$$

La 8.6.7 relativa all' elettrone (zona cariche) e la successiva ed analoga 9.6.7 relativa al positrone (zona cariche) , sono state esplicitate attraverso la 7.6.7 allo scopo di mettere in evidenza , attraverso il diverso segno delle rispettive cariche , i termini tra parentesi che assumono anch' essi segno opposto . In tal modo si formalizza la diversa natura elettrica di positrone ed elettrone e si pongono le basi per elaborarne le rispettive interazioni .

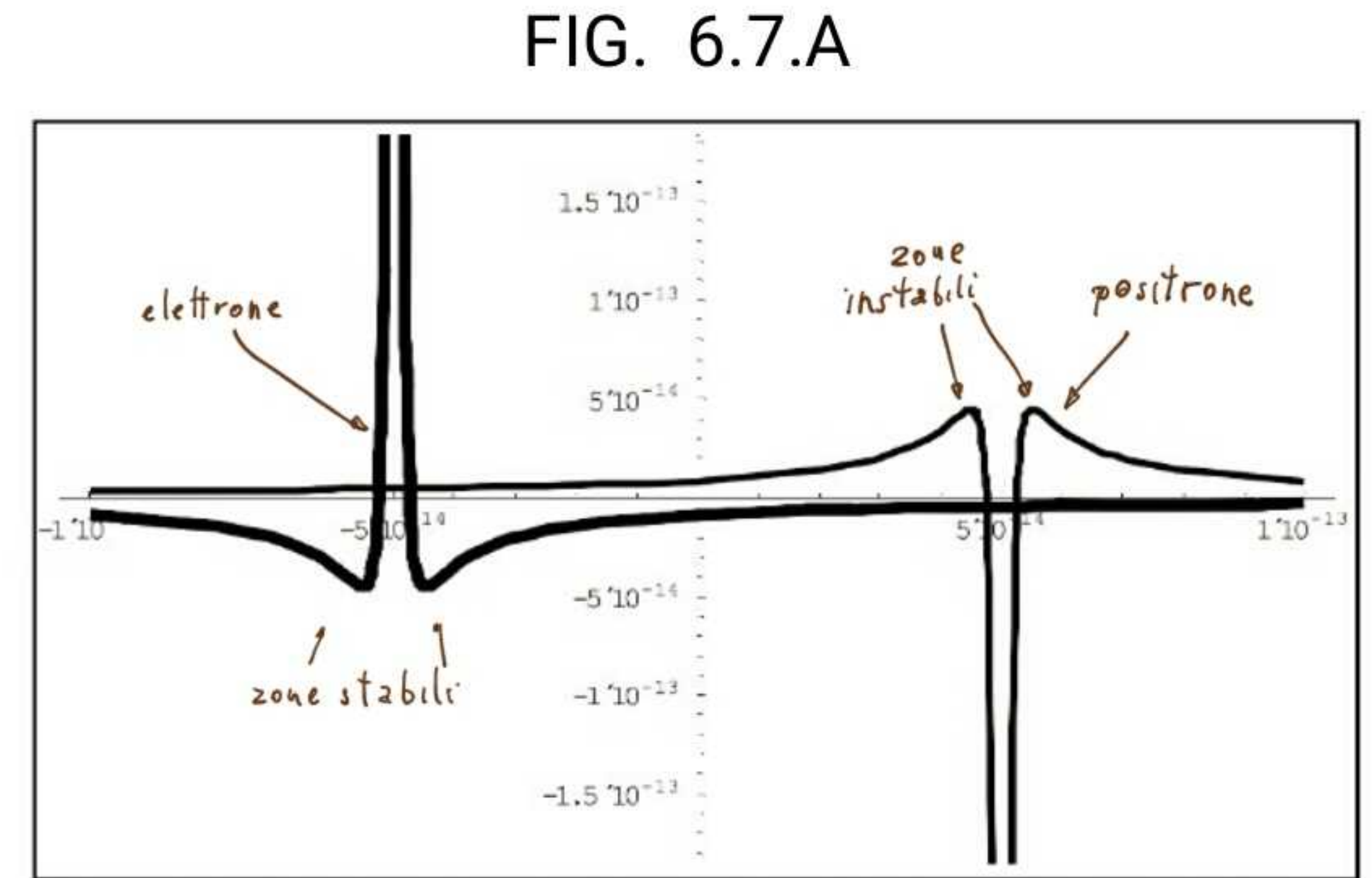
Riscrivo la 6.6.7 considerando la 7.6.7 (positrone , zona cariche) :

$$9.6.7) \quad \frac{\hbar \lambda_{q_i} e}{2} \cdot \frac{d^2 \phi_i(r)}{dr^2} + \left[- \frac{\hbar \cdot d^2 \cdot e}{\rho^2 \lambda_{q_i}} + \frac{\hbar^2 \cdot \alpha}{2\pi \epsilon_0 c^2 \lambda_{q_i} \rho} \right] \cdot \phi_i(r) = E_i \phi_i(r)$$

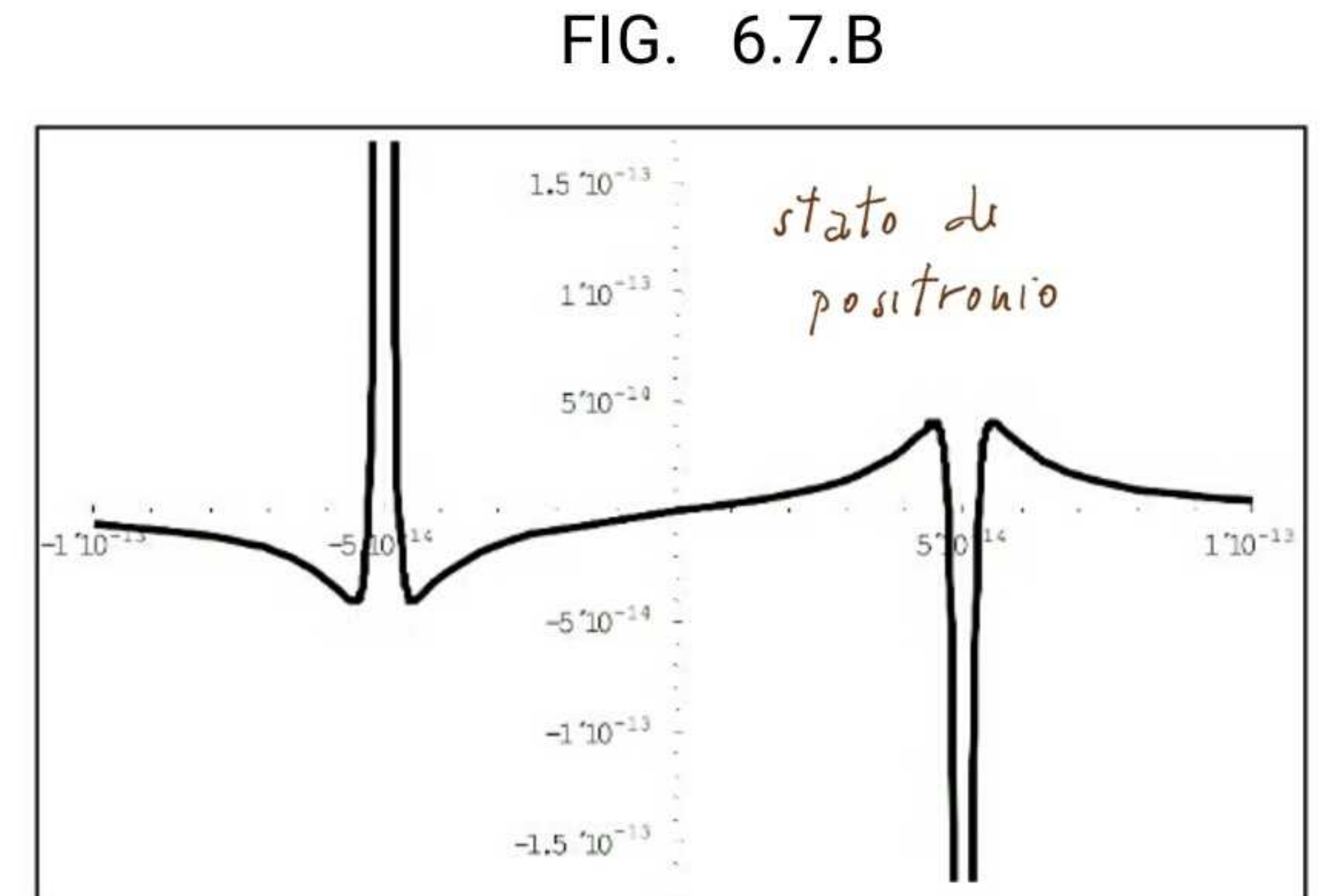
Le espressioni tra parentesi delle 8.6.7 , 9.6.7 e 5.6.7 rappresentano i potenziali efficaci dell' i-esimo livello di elettroni e positroni nelle due zone : cariche e masse . L' analisi comparativa e la opportuna composizione delle espressioni citate portano a risultati interessanti . La FIG . 6.7.A illustra i potenziali efficaci di elettrone e positrone nella zona cariche (8.6.7. e 9.6.7) . Si ha , con evidenti significati : $V_{p_i}^{EFF} = - V_{q_i}^{EFF}$

Il potenziale efficace del livello i-esimo , in zona cariche , del positrone è esattamente l' opposto dell' analogo potenziale dell' elettrone e presenta un massimo del potenziale efficace . Tale massimo , che occorre dove il potenziale dell' elettrone presenta un minimo , rappresenta una zona di equilibrio instabile contrariamente alla zona di equilibrio stabile dell' elettrone . L' equilibrio instabile del positrone non comporta il decadimento del medesimo , non permesso dal principio di conservazione della carica , ma consente una sua minore abbondanza statistica nell' universo conosciuto .

Nella FIG. 6.7.A si può notare che la zona di equilibrio stabile dell' elettrone risulta più ampia della relativa zona instabile (zona centrale), comunque irraggiungibile. Contrariamente nel caso del positrone la zona instabile è molto più ampia della zona stabile, che comunque è raggiungibile. In figura sono rappresentati i potenziali efficaci dell' i-esimo livello di elettroni e positrone in maniera disgiunta e quindi indipendenti.



In FIG. 6.7.B sono rappresentati i medesimi potenziali efficaci di FIG. 6.7.A ma in maniera congiunta, cioè i potenziali sono sommati. Si ottiene quindi uno stato di positronio dell' i-esimo livello. Tale stato è rappresentato come "congelato" e quindi privo delle variabili dinamiche che ne produrrebbero l' evoluzione fino all' annichilazione. Lo stato è ottenuto presupponendo una situazione generica (livello e distanza generici) per cui non è correlato agli stati metastabili del positronio come sono generalmente calcolati in M.Q.



Le due figure a lato sono valide solo per la zona cariche.

Non è riportato il grafico della zona masse per il positrone, in quanto identico al rispettivo grafico per l' elettrone, già noto.

L'annichilazione di un elettrone ed un positrone viene formalizzato attraverso la Q.E.D. che non riesce però a dare un modello fisico al fenomeno, ma solo diagrammi simbolici (diagrammi di Feynman) che in base alle energie e quantità di moto degli stati iniziali e finali delle due particelle aiutano a svolgere i calcoli relativi all'interazione.

Sovrapponendo le strutture dei livelli i-esimi relativi a elettrone e positrone sia nella zona cariche che nella zona masse, nell'ipotesi semplificatrice, anche se irrealizzabile sperimentalmente, di elettrone e positrone, privi di energia cinetica e quantità di moto e occupanti la medesima posizione geometrica, è possibile determinarne il modello fisico di annichilazione.

Operando nelle ipotesi semplificatorie citate si può prendere in considerazione la somma della 8.6.7 con la 9.6.7 per la zona cariche e la 5.6.7 con sé stessa per la zona masse.

Zona cariche: nell'ipotesi assunta si ha: $E_i = \pm \hbar c / \lambda_{q_i}$ nei due casi elettrone e positrone.

Sommando membro a membro:

$$10.6.7) \quad \frac{\hbar c (\lambda_{q_i} - \lambda_{q_i})}{2} \frac{d^2 \varphi_i(r)}{dr^2} + \left[\frac{\hbar c^2}{r^2 \lambda_{q_i}} - \frac{\hbar c^2}{r^2 \lambda_{q_i}} - \frac{\hbar^2 c}{2\pi \epsilon_0 c^2 \lambda_{q_i}^3 r} + \frac{\hbar^2 c}{2\pi \epsilon_0 c^2 \lambda_{q_i}^3 r} \right] \cdot \varphi_i(r) = \varphi_i(r) \left(\frac{\hbar c}{\lambda_{q_i}} - \frac{\hbar c}{\lambda_{q_i}} \right)$$

Si ottiene una identità nulla.

Zona masse: nell'ipotesi assunta si ha: $E_i = \hbar c / \lambda_{m_i}$ nei casi elettrone e positrone.

Sommando membro a membro:

$$11.6.7) \quad -\hbar \lambda_{m_i} c^2 \cdot \frac{d^2 \varphi_i(r)}{dr^2} + \left[\frac{2 \cdot \hbar \lambda_{m_i} c^2}{r^2} - \frac{e^2}{\pi \epsilon_0 r} \right] \cdot \varphi_i(r) = 2 \varphi_i(r) \cdot \frac{\hbar c}{\lambda_{m_i}}$$

Si ottiene una struttura che, nelle ipotesi fatte, si può considerare genesi di due o più fotoni.

Considerando che all'anullarsi delle cariche, quando i due centri di carica coincidono, si annulla il 2° termine nella parentesi della 11.6.7 e presupponendo il caso più probabile di produzione di due fotoni si può scrivere, considerando uno solo dei

fotoni risultanti :

$$15.6.7) - \frac{\chi_{m_i} \alpha^2}{2} \frac{d^2 \varphi_i(r)}{dr^2} + \left[\frac{\chi_{m_i} \alpha^2}{r^2} \right] \cdot \varphi_i(r) = \frac{1}{\chi_{m_i}} \cdot \varphi_i(r) \rightarrow \alpha^2 \chi_{m_i} \left[-\frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi_i(r)}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \varphi_i(r) \right] = \varphi_i(r)$$

Ottenendo un' espressione che è funzione , come anche il potenziale efficace relativo , di : $\chi_{m_i} ; \alpha$

La 17.2.3 (funzione d' onda radiale dell' orbitale 1S) contiene a differenza della 16.2.3 (funzione d' onda totale dell' orbitale 1S) un termine angolare che viene esplicitato nella 18.2.3 (quadrato della 17.2.3) come fattore : $1/4\pi$.

Le 17.2.3 e 18.2.3 contengono quindi un termine "orbitale" che giustifica (in funzione della definizione di spin nel PAR. 2.3) il termine : $\pm h/4\pi = \pm \hbar/2$ come momento angolare di spin dell' elettrone (positrone) .

Tutta la trattazione di questo paragrafo, essendo eseguita in termini radiali , non può esplicitare i termini di spin ed il loro cambiamento nel fenomeno dell' anichilazione .

Inoltre , essendo tale trattazione , condotta in termini stazionari e quindi indipendenti dal tempo , non è possibile seguire l' evolversi delle strutture considerate nelle loro interazioni . Rimane solo possibile seguirne "stati" distinti alle varie distanze relative .

La 15.6.7 risulta essere una sorta di "equazione di Schrodinger" per il fotone , dalla quale integrando si può ottenere una "funzione d' onda " per il fotone la cui descrizione deve essere completata con le relative considerazioni dovute al cambiamento di spin tra fermioni e bosoni .

🕒 Il metodo segue la somma dei potenziali efficaci delle particelle interagenti come già applicato precedentemente.

🍵 È utile ricordare che le equazioni di Schrodinger e relative funzioni d' onda usate in questo PARAGRAFO e nel CAP. 2 sono generalmente usate in relazione alle strutture interne degli enti considerati quindi : masse parziali , cariche parziali e i corrispettivi in termini di lunghezze d' onda .