PAR. 2.7 ELETTRONE LIBERO

Il caso più semplice di funzione d' onda associata ad una particella (in questo caso elettrone) libera di muoversi senza alcun vincolo è l' onda piana alla de Broglie :

1.2.7) $\psi(x,t) = A e^{i(k_\eta x - \omega t)}$ caso unidimensionale . Con : $k_\eta = 1/\lambda\!\!\!^{-}$ vettore d' onda e : $\omega = E/\hbar$

Per problemi di normalizzazione , un approccio per costruire onde piane localizzate è quello di considerare un "pacchetto" costruito sovrapponendo onde piane di lunghezze d' onda diverse , attraverso una opportuna funzione di distribuzione di tali lunghezze d' onda : $g(k_\eta)$

Se la $g(k_\eta)$ è scelta come gaussiana , si ottengono pacchetti gaussiani . La funzione d' onda diventa :

2.2.7) $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int e^{i(k_\eta x - \omega(k_\eta)) \cdot t} \cdot g(k_\eta) \cdot dk_\eta$

La dispersione della 2.2.7 risulta : (6)

3.2.7) $\Delta x(t) = \Delta x_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar t}{2 \Delta x_0^2 \cdot m}\right)^2} \approx \frac{\hbar t}{2 \Delta x_0 \cdot m}$ (per : $\Delta x_0 <<$)

La gaussiana si allarga e si abbassa col passare del tempo , pur rimanendo costante l' area ad essa sottesa .

Considerando la sovrapposizione di un potenziale armonico oscillante al pacchetto di onde piane si ottiene : (6)

4.2.7) $\psi(x,0) = \frac{\sqrt{\rho}}{\pi^{1/4}} \cdot e^{-\rho^2 (x-x_0)/2}$ con : $\rho = \sqrt{m\omega/\hbar}$ ed inoltre :

5.2.7) $\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) \cdot e^{-i(E_n/\hbar)\cdot t}$

È possibile dimostrare che :

6.2.7) $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} = x_0$

La forma del pacchetto (gaussiana) essendo indipendente dal tempo , non cambia , e lo stato che si propaga è uno stato coerente .
La caratterizzazione della particella libera in 3 dimensioni , passa attraverso l' adozione di coordinate sferiche .(6)
Il problema si riduce al trattamento della sua parte radiale . L' equazione di Bessel in coordinate sferiche , usata normalmente in questi casi , presenta naturalmente un termine che si identifica con un momento angolare orbitale o potenziale centrifugo : $l(l+1)\hbar^2/2mr^2$ che per $l=0$ produce una forza centrifuga :

7.2.7) $F^m(r) = -\hbar^2/mr^3$ da cui si può dedurre , applicando una semplice legge del moto :

8.2.7) $r(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar^2}{m^2 r^3}\right)\cdot t^2 + r(0) + v(0)\cdot t$

Dalla 8.2.7 si può dedurre la legge di dispersione nel caso della propagazione di onde sferiche , come analogamente ai casi precedenti nelle 3.2.7 e 6.2.7
L' applicazione di un potenziale centrale ed in particolare del potenziale Coulombiano , al caso precedente , produce il

potenziale efficace nell' atomo di Bohr e i potenziali efficaci estesi nei vari livelli e sottolivelli nella struttura dell' elettrone .

Considerando un solo livello elettronico generico (ma vale anche per tutti gli altri) . Il potenziale efficace , considerando solo la zona "masse" risulta :

9.2.7) $V_{eff}^{m_i} = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{m_i r^2} - \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 r}$ avendo posto : $q_s = e$, e derivando rispetto ad r ottengo le forze radiali :

10.2.7) $F_{(r)}^{m_i} = \frac{-2\hbar^2\alpha^2}{m_i r^3} + \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$

Eguagliando $F_{(r)}^{m_i}$ a zero posso ottenere R_i , oppure applicando la legge del moto radiale ottengo come in precedenza :

11.2.7) $r_i(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-2\hbar^2\alpha^2}{m_i^2 r^3} + \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 m_i r^2}\right) t^2 + r_i(0) + V_{r_i}(0) \cdot t$

La 11.2.7 , se eguaglio $F_{(r)}^{m_i}$ a zero e considero :$V_{r_i}(0) = 0$, si riduce a :

12.2.7) $r_i(t) = r_i(0)$ quindi il livello , parimenti agli altri livelli e sottolivelli , evolve temporalmente senza disperdersi .

Se impongo un r diverso da R_i , $F_{(r)}^{m_i}$ non si annulla più , mi pongo lontano dall' equilibrio delle forze agenti , ed ottengo una legge del moto che può produrre , momentaneamente , dispersione o concentrazione in funzione del valore di r imposto e quindi del segno della $F_{(r)}^{m_i}$ risultante .
Anche se con l' evoluzione temporale si ha una non dispersione di ogni singolo livello , è necessario considerare che la produzione di un elettrone (per esempio in coppia e^+, e^- da gamma di opportuna energia in vicinanza di un nucleo atomico) , che avviene in una regione di spazio la cui dimensione si può stimare in circa $10^{-15} m$. , dovendo acquisire tutti i livelli e sottolivelli disponibili , genera una espansione dimensionale di tutta la struttura . Il limite superiore di tale espansione

può essere stimato operativamente considerando la precisione con cui si può sperimentare il valore di massa dell' elettrone ed usare la relazione tra massa e raggio per avere il valore di quest' ultimo .
Quindi ottengo :

13.2.7) $R_{max} = \frac{\hbar \alpha}{c \cdot \Delta m_{min}} \simeq 10^{-5} m,$ con $\Delta m_{min} \simeq 10^{-40}$ Kg-massa

Tale valore è anche relativo all' "ambiente" in cui è presente l' elettrone : il vuoto intergalattico ed il plasma di una stella a neutroni produrrebbero presumibilmente , se si potessero fare misure anche indirette , risultati sensibilmente diversi .

La forma più generale della 2.2.7 è quella tridimensionale che risulta in una sfera dove la distribuzione gaussiana è lungo il raggio . Anche in questo caso , più completo , non è risolta la normalizzazione della massa .

Il modello proposto pur essendo sempre a geometria sferica presenta le seguenti peculiarità rispetto al precedente :

-) La distribuzione lungo il raggio segue una successione di sfere concentriche su cui è definita una massa parziale ed una funzione d' onda. Tale successione è derivata dalla formula delle masse . I vari livelli sono connessi . (vedi PAR. 2.3)

-) Ogni livello è costruito analogamente all' orbitale 1S dell' atomo di Bohr, quindi è intrisecamente stazionario .
 Ciò comporta , una normalizzabilita' delle masse relative ai singoli livelli ed insieme a valutazioni di cui alla 13.2.7 , una sostanziale normalizzabilita' della massa (e della carica) totali .